

Inegalitati

Prof. Mirea Mihaela Mioara
Liceul Tehnologic „Horia Vintila” Segarcea, Dolj

Abstract Studiul inegalităților integrale presupune utilizarea noțiunilor clasice. În literatura de specialitate sunt utilizate frecvent inegalitățile integrabile pentru obținerea existenței, unicității, stabilității și diferitelor proprietăți ale soluțiilor unor ecuații diferențiale neliniare.

În literatura de specialitate sunt utilizate frecvent inegalitățile integrabile pentru obținerea existenței, unicității, stabilității și diferitelor proprietăți ale soluțiilor unor ecuații diferențiale neliniare. Acest tip de inegalități joacă un rol important în teoria ecuațiilor diferențiale și integralelor. Inegalitățile de tip Gronwall au numeroase aplicații în rezolvarea problemelor de marginire, unicitate, stabilitate atât în teoria ecuațiilor diferențiale cât și în ecuații integrale de tip Volterra

Keywords : inegalități integrabile, Gronwall

Este cunoscut interesul studiului pe semiaxa $R_+=[0,\infty)$ a soluțiilor ecuațiilor diferențiale (în special de primul și al doilea ordin). Apetitul pentru acest studiu a fost deschis de articolul lui Gronwall [4]. Trebuie precizat că studiul ecuațiilor de ordin doi este transformat, în genere, într-un sistem de ecuații de ordin întâi. Există cazuri când aceste transformări sunt dificile sau determinarea formei soluțiilor prezintă un grad ridicat de dificultate.

Studiul inegalităților integrale presupune utilizarea noțiunilor clasice. În literatura de specialitate sunt utilizate frecvent inegalitățile integrabile pentru obținerea existenței, unicității, stabilității și diferitelor proprietăți ale soluțiilor unor ecuații diferențiale neliniare.

În literatura de specialitate sunt utilizate frecvent inegalitățile integrabile pentru obținerea existenței, unicității, stabilității și diferitelor proprietăți ale soluțiilor unor ecuații diferențiale neliniare. Acest tip de inegalități joacă un rol important în teoria ecuațiilor diferențiale și integralelor. Inegalitățile de tip Gronwall au numeroase aplicații în rezolvarea problemelor de marginire, unicitate, stabilitate atât în teoria ecuațiilor diferențiale cât și în ecuații integrale de tip Volterra.

În 1919, în Ann. Math., T. Gronwall a enunțat următorul rezultat.

Teorema 1(Gronwall): Fie $x(t), g(t)$ funcții continue, pozitive cu valori reale pe intervalul: $J=[0, T]$, și α, β constante pozitive. Presupunem că are loc inegalitatea:

$$(1) \quad 0 \leq x(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t g(s)x(s)ds \quad \text{pe } J.$$

Atunci

$$(2) \quad x(t) \leq \alpha \exp\left(\beta \int_0^t g(s)ds\right), \quad \text{pe } J.$$

Demonstrarea teoremei, prezentată în această lucrare este dată de Ioan A. Rus [6].

DEMONSTRATIE: Presupunem α și β constante reale pozitive. Notăm

$$h(t) = \int_0^t g(s)x(s)ds$$

Avem că $h'(t) \leq (\alpha + \beta h(t))g(t)$. Împărțind cu $\alpha + \beta h(t)$ și integrând, avem

$$\frac{1}{\beta} \ln \frac{\alpha + \beta h(t)}{\alpha} \leq \int_0^t g(s) ds \quad \text{sau} \quad x(t) \leq \alpha + \beta h(t) \leq \alpha \exp \left(\beta \int_0^t g(s) ds \right).$$

Tinand seama de ipoteza din teorema, rezulta concluzia .

#

Teorema 2: Fie $x(t), a(t), b(t)$ functii continue, pozitive cu valori reale pe intervalul: $J=[0, T]$, si $b(t) \geq 0$. Presupunem ca are loc inegalitatea:

$$(3) \quad 0 \leq x(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)x(s)ds \quad \text{pe } J.$$

Atunci

$$(4) \quad x(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s) \exp \left(\int_s^t b(\tau) d\tau \right) ds, \quad \text{pe } J.$$

DEMONSTRATIE: Notam cu $y(t) = \int_0^t b(s)x(s)ds$.

Avem ca $y'(t) = b(t)x(t) \leq b(t)(a(t) + y(t)) = b(t)a(t) + b(t)y(t)$.

Obtinem ca, $y'(t) \leq b(t)a(t) + b(t)y(t)$.

Inmultim ultima inegalitate cu $\exp \left(- \int_0^t b(s)ds \right)$ si obtinem ca :

$$\frac{d}{dt} \left(y(t) e^{-\int_0^t b(s)ds} \right) \leq a(t)b(t) e^{-\int_0^t b(s)ds}$$

Prin integrare avem ca: $y(t) \leq \int_0^t a(s)b(s) e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds$, pe J.

De unde, se obtine inegalitatea dorita.

#

Teorema anterioara se găsește in V. Barbu [1] și ca aplicație în V. Rădulescu [8].

Teorema 3 Fie $x, k, v \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$ si $M \geq 0$. Daca :

$$(5) \quad x(t) \leq M + \int_0^t (k(s)x(s) + v(s))ds, \forall t \in [0, T]$$

Atunci avem inegalitatea :

$$x(t) \leq M \exp \left(\int_0^t k(s)ds \right) + \int_0^t v(s) \exp \left(\int_s^t k(u)du \right) ds.$$

DEMONSTRATIE:Fie $X = C([0, T], \mathbb{R}_+)$ spatiul Banach .Consideram operatorul $A: X \rightarrow X$ definit de relatia :

$$Ax(t) = M + \int_0^t (x(s)k(s) + v(s))ds, (\forall) t \in [0, T]$$

Atunci (5) devine $x(t) \leq Ax(t)$.

Fie $\tau > 0$, τ numar real. Pentru x din X consideram norma Bielecki:

$$\|u\|_B = \sup_{t \in [0, T]} |u(t)| e^{-\tau t}$$

si notam cu d_B metrica indusa.

Relatia de ordine \leq definita astfel : pentru orice $x, y \in X$, avem $x \leq y$ daca si numai daca $x(t) \leq y(t)$, oricare ar fi $t \in [0, T]$ Fie $x, y \in X$ astfel incat $x \leq y$. Se observa ca $Ax(t) \leq Ay(t)$, adica, A este operator crescator.

Deoarece k este definita pe un interval inchis si marginit, atunci exista $L > 0$ astfel incat $|k(t)| \leq L$, pentru orice t din intervalul $[0, T]$

$$\text{Consideram estimarea : } |Ax(t) - Ay(t)| \leq \int_0^t |k(s)| |x(s) - y(s)| ds \leq \frac{L}{\tau} \|x - y\|_B e^{\tau t}$$

$$\text{De unde obtinem ca : } \|Ax - Ay\|_B \leq \frac{L}{\tau} \|x - y\|_B.$$

Vom lua τ astfel incat $L/\tau < 1$. Obtinem astfel ca A este contractie in spatiul metric complet (X, d_B) . Obtinem ca A este operator Picard si, deci, exista x^* punct fix al lui A . Suntem in conditiile teoremei 3 si cum $x(t) \leq Ax(t)$ obtinem inegalitatea $x(t) \leq x^*(t)$.

Vom determina x^* .

Vom considera ecuatia:

$$(6) \quad x(t) = M + \int_0^t (k(s)x(s) + v(s)) ds, \forall t \in [0, T].$$

Derivam ecuatia (6) si obtinem $x'(t) = k(t)x(t) + v(t)$. Aplicand metoda variabilelor constante obtinem ca solutia acestei ecuatiei este :

$$x^*(t) = M \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right) + \int_0^t v(s) \exp\left(\int_s^t k(u) du\right) ds.$$

Obtinem, astfel inegalitatea din enunt.

#

Bibliografie:

- 1) **V. Barbu**, *Ecuatii Diferentiale*, Ed. Junimea, Iasi, 1985;
- 2) **R. Bellman**, *The Stability of Solutions of Linear Differential Equations*, Duke Math.J, 10(1943), 643 –647
- 3) **I. Bihari**, *A Generalization of a Lemma of Bellman and its Applications to Uniqueness Problems of Differential Equations*, Acta Math. Sci. Hungar 7(1956), 71 –94;
- 4) **Gronwall T.H.**, *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations*, Ann. Math., 20(1919), 292-96
- 5) **L. Losonczi**, *A Generalization of the Gronwall – Bellman Lemma and its Applications*, J. Math. An. & appl. 44(1973), 701-109

- 6) **T.L. Radulescu, V. D. Radulescu, T. Andreescu** - *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*, Springer Verlag (2009)
- 7) **Ioan A. Rus**, *Ecuatii Diferentiale, Ecuatii Integrale si Sisteme Dinamice*, Casa Ed. Transilvania Press, 1996;
- 8) **Ioan A. Rus**, *Picard Operators and Applications*, Babes –Bolyai Univ., Preprint nr. 3/1996;
- 9) **Ioan A. Rus**, *A General Functional Inequality and its Applications*, Revue d'Analyse Numérique et de Theorie de l'Aproximation, vol. 26, nr.1-2(1997), 209-213;
- 10) **Ioan A. Rus**, *Functional- Differential Equations of Mixed Type, Via Weakly Picard Operators*, Seminar Fixed Point Theory Cluj- Napoca, vol. 3(2002), 335-346;